∽ Baccalauréat S Liban ∽

mai 2012

Exercice 1 6 points

Commun à tous les candidats.

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} > 0, \text{ car somme de nombres positifs sur }]0\,;\,+\infty[$$

La fonction g est donc croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
Tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$		$+$		
$g(x)$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction g est continue (comme somme de fonctions continues) et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur $]-\infty\,;\,+\infty[$.
Or $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$, 0 possède donc un unique antécédent, que l'on notera α. Nous avons donc $g(\alpha) = 0$.
De plus,

$$\left\{\begin{array}{l} g(0,86) \simeq -0,0295 < 0 \\ g(0,87) \simeq +0,0385 > 0 \end{array}\right. \Longrightarrow g(0,86) < g(\alpha) = 0 < g(0,87) \Longleftrightarrow \boxed{0,86 < \alpha < 0,87}$$

3. Signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < x < \alpha \Longrightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \\ x > \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha) = 0 \end{array}\right.$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

1. • Limite de la fonction f en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \text{car } \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

   • Limite de la fonction f en $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \ (\textit{puissances comparées})$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.
   En effet :

$$\lim_{x\to +\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

   • Le signe de $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ est celui de $-\ln x$, car $x^2 > 0$:
   • Position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ :
   • Sur $]0\,;\,1[$, $-\ln x > 0$, $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ,
   • sur $]1\,;\,+\infty[$, $-\ln x < 0$, $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ,
   • $\mathscr{C}$ et Δ ont un point commun A$(1, 2)$.

3. Dérivée $f'(x)$ de f :

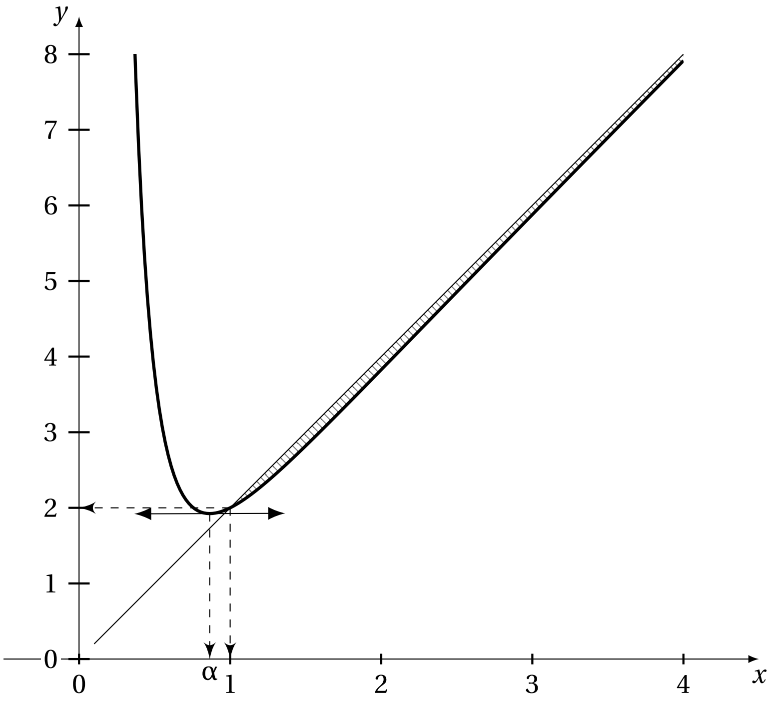
$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{2x^4 - x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

   $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ car x^3 est strictement positif sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. Tableau de variations de la fonction f :

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	$+$				
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	2	↗	$+\infty$

5. Figure :



Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par (u.a ; (unité d'aire)=2cm^2) :

$$\mathrm{I}_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

car l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$ est :

$$\int_1^n \left(2x - \left(2x - \frac{\ln x}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x \times \text{u.a.} = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \times \text{u.a.} = 2 \times \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_n$$

2. a) Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties :

On pose :

$$u(x) = \ln x \quad ; \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad v(x) = -\frac{1}{x}$$

Ainsi :

$$\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^n = \frac{n-1-\ln n}{n}$$

b) Ainsi :

$$\mathrm{I}_n = 2\frac{n-1-\ln n}{n} = 2 - \frac{2}{n} - \frac{2\ln n}{n}$$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 2$, car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{n} = 0$

Exercice n° 2 4 points

Commun à tous les candidats.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t\\ y &=& 6+2t\\ z &=& 4-t\end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 8+5t'\\ y &=& 2-2t'\\ z &=& 6+t'\end{array}\right., \quad t'\in\mathbb{R}.$$

On cherche le point d'intersection éventuel $\text{M}(x;y;z)$ de ces deux droites :

$$\left\{\begin{array}{l} x=4+t=8+5t'\\ y=6+2t=2-2t'\\ z=4-t=6+t'\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t-5t'=4\\ 2t+2t'=-4\\ -t-t'=2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t-5t'=4\\ t+t'=-2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6t'=-6\\ t+t'=-2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=-1\\ t'=-1\end{array}\right.$$

Les deux droites ont donc comme point commun $\text{M}(4-1;6-2;4+1)=(3;4;5)$.
Affirmation : les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$, on considère les points $\text{A}(12;7;-13)$ et $\text{B}(3;1;2)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y-5z=1$.
Le point $\text{B}(3;1;2)$ appartient au plan $\mathscr{P}$, car $3\times3+2\times1-5\times2=1$.
Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-9\\-6\\15\end{pmatrix}$ est colinéaire à un vecteur normal du plan : $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{\text{AB}}=-3\vec{n}$.
Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

3. On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n=\frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n=2+\frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}-2=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\times1}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}-2=-1\neq0$$

Affirmation : ces deux suites ne sont pas adjacentes.

4. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2, \text{ pour tout entiernaturel } n.$$

Démonstration par récurrence :
- $u_0=1<3$
- Supposons que pour tout n, on ait : $u_n\leqslant3$

$$u_n\leqslant3\Longrightarrow\frac{1}{3}u_n\leqslant1\Longrightarrow u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2\leqslant3$$

- Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_n\leqslant3$

Affirmation : cette suite est majorée par 3.

Exercice n° 3 5 points

Commun à tous les candidats.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'une U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les événements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

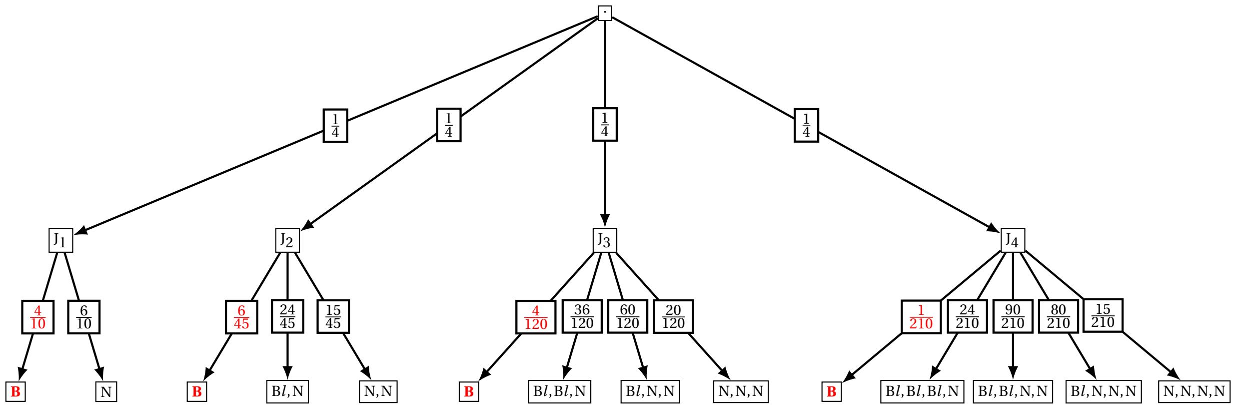
J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question **4.b)** *où une valeur arrondie à* 10^{-2} *suffit.*

Arbre complet, mais non demandé.



1. Probabilité de l'événement B sachant que l'événement J_1 est réalisé :

$$P_{J_1}(B) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{1}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

De même la probabilité $P_{J_2}(B)$ est :

$$P_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

Et :

$$P_{J_3}(B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210}$$

2. Calcul de $P(B)$, probabilité de l'événement B :

$$P(B) = P(B\cap J_1) + P(B\cap J_2) + P(B\cap J_3) + P(B\cap J_4) = P_{J_1}(B)\times P(J_1) + P_{J_2}(B)\times P(J_2) + P_{J_3}(B)\times P(J_3) + P_{J_4}(B)\times P(J_4)$$
$$= \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{2}{15}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{30}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{210}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{84+28+7+1}{210}\right) = \frac{1}{7}$$

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. La probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 correspond à $P_B(J_3)$

$$P_B(J_3) = \frac{P(B \cap J_3)}{P(B)} = \frac{P_{J_3}(B) \times P(J_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{30} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}$$

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.
   a) La loi suivie par la variable aléatoire N est une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = P(B) = \frac{1}{7}$.
   b) Probabilité de l'événement $(N = 3)$:

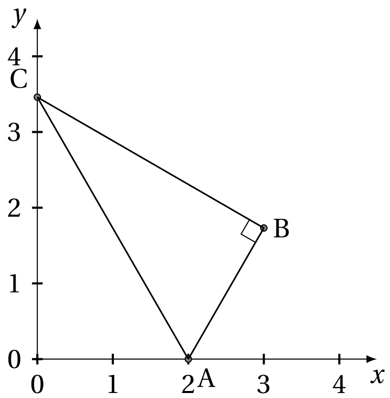
$$P(N = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^7 = 120 \times \frac{6^7}{7^{10}} \simeq 0,12$$

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

1. **Un triangle**
   a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.



Mesure de l'angle $\widehat{ABC}$:

$$(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = \text{Arg}\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \text{Arg}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}\right) = \text{Arg}\left(\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)}{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)}\right) = \text{Arg}\frac{\sqrt{3}}{3}i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{R})$$

   b) ABC est donc un triangle rectangle en B. Le centre du cercle circonscrit à ce triangle est donc le milieu Ω de l'hypoténuse [AC]. Ainsi :

$$\omega = \frac{a+c}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

2. **Une transformation du plan**

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a) Calculs des affixes des points A_2, A_3 et A_4 :

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z_0 + 2 = 2 = a \quad ; \quad z_2 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z_1 + 2 = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3} = b$$

$$z_3 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z_2 + 2 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_4 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z_3 + 2 = 2\mathrm{i}\sqrt{3} = c$$

On remarque que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$.

b) Longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$:

$$A_1A_2 = |b-a| = \left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2 \quad ; \quad A_2A_3 = \left|2+2\mathrm{i}\sqrt{3} - \left(3+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right| = \left|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 2$$

$$A_3A_4 = \left|2\mathrm{i}\sqrt{3} - \left(2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right| = 2$$

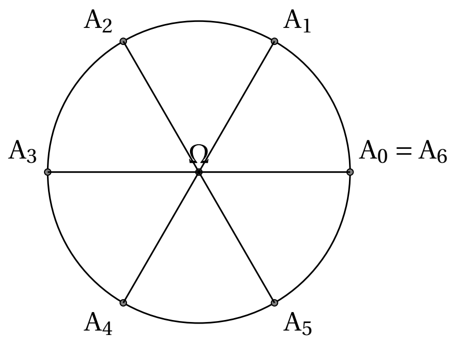
c) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} z_{n+1} - \omega &= \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z_n + 2 - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z_n + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \\ &= \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\left(z_n + \frac{2(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\right) = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\left(z_n + 2\frac{-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) \end{aligned}$$

d) Le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

$$z_{n+1} - \omega = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_n - \omega) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega)$$

e) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.



La composée de deux rotations de même centre Ω et d'angle α et β donne une rotation de centre Ω et d'angle $\alpha + \beta$.

Donc, si l'on compose six fois la même rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ à un point, on obtient la rotation de même centre et d'angle $6 \times \dfrac{\pi}{3} = 2\pi$, c'est-à- dire l'identité.

Affixe du point A_{2012} est $b = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$:

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,1\,2 & 6 \\ \cline{2-2} 2\,1 & 3\,3\,5 \\ 3\,2 & \\ 2 & \end{array} \quad \Longleftrightarrow 2012 = 6 \times 335 + 2 \Longrightarrow A_{2012} = A_2 = B$$

3. Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est un triangle équilatéral (isocèle de sommet Ω et d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$). Ainsi la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$ est la même que celle du segment $[\Omega A_n]$.
Comme A_n est l'image de A_0 par la rotation de centre Ω et d'angle $n \times \dfrac{\pi}{3}$, on a

$$\Omega A_n = \Omega A_0 = \left|0 - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 2$$

Exercice n° 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

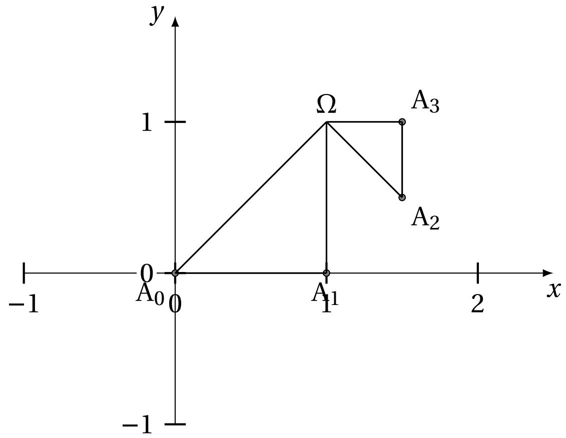
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.
On note z_n la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n + 1, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

1. Calculs des affixes des points A_1, A_2 et A_3.

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_0 + 1 = 1\ ;\ z_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_1 + 1 = \frac{3+\mathrm{i}}{2}\ ;\ z_3 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_2 + 1 = \frac{3+2\mathrm{i}}{2}$$



2. a) Le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une similitude directe s :
   z_{n+1} est de la forme $az_n + b$, où a et b sont deux nombres complexes ($a \neq 0$. Donc, A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe s.
   - Son rapport est : $k = |a| = \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
   - son angle est $\theta = \mathrm{Arg}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; (parties réelle et imaginaire égales)
   - son centre est le point fixe de la transformation ($s(\omega) = \omega$) :

$$\omega = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\omega + 1 \iff \omega\left(1 - \frac{1+\mathrm{i}}{2}\right) = 1 \iff \omega\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right) = 1 \iff \omega = \frac{2}{1-\mathrm{i}} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{2} = 1+\mathrm{i}$$

   b) Le triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est isocèle rectangle :
   Une similitude directe conserve les angles orientés, Ω est invariant, donc :

$$\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}_{n+1}}; \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}_n}; \overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}\right) = \cdots = \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}_1}; \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}\right)$$

   Or

$$\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}_1}; \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1 - z_0}{z_1 - \omega}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{-\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

   Le triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est donc rectangle. De plus

$$\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}_n}; \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}_{n+1}}\right) = \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

   Le triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est donc rectangle isocèle.

3. a) Pour tout entier naturel n, on a : $\Omega A_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$:

   Le rapport de s est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui signifie que $\Omega A_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n$.
   La suite de terme général ΩA_n est une suite géométrique
   - de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   - et de premier terme $\Omega A_0 = |\omega| = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

   Ainsi :
   $$\Omega A_n = \Omega A_0 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \sqrt{2} \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

   b) À partir de $n = 21$ les points A_n sont situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon $0,001$:
   $$\Omega A_n \leqslant 0,001 \iff \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \leqslant 0,001 \iff (n-1)\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant \ln(0,001) \iff n \geqslant 1 + \dfrac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \simeq 20,9$$

   Il y a changement de sens de l'inégalité car on divise de chaque côté par $\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ qui est négatif.

4. Pour tout entier naturel n, on note a_n la longueur A_nA_{n+1} et L_n la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

   L_n est ainsi la longueur de la ligne polygonal $A_0A_1 \cdots A_nA_{n+1}$.
   - Calcul de L_n :
     Comme le triangle ΩA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1}, on a
     $$a_n = A_nA_{n+1} = \Omega A_{n+1} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$
     Ainsi :
     $$L_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \dfrac{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$$
   - Limite de L_n quand n tend vers $+\infty$:
     Nous avons $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$.
     Ainsi :
     $$\lim_{n\to+\infty} L_n = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

5. Pour tout entier naturel n, les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés :
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+4}}\right) &= \left(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}};\overrightarrow{\Omega A_{n+2}}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+2}};\overrightarrow{\Omega A_{n+3}}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+3}};\overrightarrow{\Omega A_{n+4}}\right)\\ &= \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \pi + 2k\pi\end{aligned}$$